OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
26 FEBRUARIE 2017
Clasa a V-a

Subiectul 1

Determinaţi două numere naturale a căror sumă să fie egală cu 320, ştiind că, dacă îl împărţim pe primul la al doilea, obţinem restul 20, iar, dacă îl împărţim pe al doilea la primul, obţinem restul 150.

Subiectul 2

a) Determinați numerele naturale m, n și p astfel încât $8\cdot\left(4^m+\overline{mnm}\right)+2^p=5921$;

b) Aflați suma cifrelor numărului $a=10^{2016}+10^{1008}-5$.

Subiectul 3

Fie șirul 3, 11, 27, 59, 123,...

a) Să se scrie următorii doi termeni ai șirului;

b) Dacă S este suma primilor 100 de termeni ai șirului, să se arate că $\left[\left(S+500\right):8+1\right]:2$ este cub perfect.

Subiectul 4

Determinați numărul $\overline{abcd}$ știind că $\overline{abcd}=\overline{ca}^3+\overline{cd}^2$.

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.

Str. General Berthelot, nr. 28-30
sector 1, 010168, București
Tel: +40 (21) 405 62 00
+40 (21) 405 63 00
www.edu.ro

Str. Ecaterina Teodoroiu, nr. 8B, Slatina, 230015, jud. Olt
E/mail ISJ: secretariat@isjolt.ot.edu.ro
Tel: +40 (249) 41 09 27
Fax: +40 (249) 41 28 01
www.isjolt.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
26 FEBRUARIE 2017
Clasa a VI-a

Subiectul 1

Rezolvaţi ecuaţia: $\frac{x}{2016}+\frac{x+1}{2017}+\frac{x+2}{2018}+...+\frac{x+2015}{4031}=2016$.

Subiectul 2

Arătați că numerele $\overline{zxy}$ și $\overline{yxz}$ sunt pătrate perfecte, dacă $\frac{xy+1}{xyz+y+z}=\frac{7}{64}$.

Subiectul 3

Se consideră unghiurile adiacente suplementare $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$ astfel încât $m(\sphericalangle AOB)<90^0$. În semiplanul determinat de dreapta BC și de punctul A, se consideră semidreptele *(OM* și *(OP* astfel încât $OM \perp BC$ și $OP \perp OA$.

a) Demonstrați că $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle POC$.
b) Demonstrați că bisectoarele *(OE* și *(OF* ale unghiurilor $\sphericalangle AOM$ respectiv $\sphericalangle POC$ sunt perpendiculare.

Subiectul 4

Determinați numerele prime *a*, *b*, *c* pentru care $15a+35b+91c=2015$.

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.

Str. General Berthelot, nr. 28-30
sector 1, 010168, București
Tel: +40 (21) 405 62 00
+40 (21) 405 63 00
www.edu.ro

Str. Ecaterina Teodoroiu, nr. 8B, Slatina, 230015, jud. Olt
E/mail ISJ: secretariat@isjolt.ot.edu.ro
Tel: +40 (249) 41 09 27
Fax: +40 (249) 41 28 01
www.isjolt.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
26 FEBRUARIE 2017
Clasa a VII-a

Subiectul 1

Aflați numerele naturale $\overline{abcd}$ care îndeplinesc simultan condițiile:

i) $\frac{a+2016}{d+2011}=\frac{b+2016}{c+2012}=\frac{c+2016}{a+2020}=\frac{d+2016}{b+2021}$,

ii) $\sqrt{\overline{abcd}} \in \mathbb{N}$.

Subiectul 2

Arătați că numărul $a=\sqrt{2\cdot 3^{n+3}+5\cdot 3^{n+1}+7\cdot 3^{n}+14} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Subiectul 3

Fie triunghiul *ABC* dreptunghic în *A*, $D \in (BC)$ astfel încât *2BD* = *DC*, $m(\measuredangle BCA)=30^{o}$, *F* mijlocul laturii *AB*, *(BE* bisectoarea $\measuredangle ABC$, $E \in (AC), BE \cap AD = \{O\}$.

Arătați că:

a) $ED \parallel AB$;
b) *C*, *O*, *F* coliniare.

Subiectul 4

În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiește trapezul $BCEF$ cu $CE \parallel BF$ și $BF = EF$, astfel încât $[AE \cap [DF = \{B\}$. Fie M mijlocul laturii $[CE]$ și N punctul în care paralela prin E la AF intersectează latura $[BC]$.

a) Să se stabilească natura triunghiului *ACF*.
b) Să se demonstreze că punctele *A*, *M* și *N* sunt coliniare.

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Str. General Berthelot, nr. 28-30
sector 1, 010168, București
Tel: +40 (21) 405 62 00
+40 (21) 405 63 00
www.edu.ro

Str. Ecaterina Teodoroiu, nr. 8B, Slatina, 230015, jud. Olt
E/mail ISJ: secretariat@isjolt.ot.edu.ro
Tel: +40 (249) 41 09 27
Fax: +40 (249) 41 28 01
www.isjolt.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
26 FEBRUARIE 2017
Clasa a VIII-a

Subiectul 1

a) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația: $yx-9y-8z+72=0$.
b) Dacă $x_0,\ y_0,\ z_0\in\mathbb{N}$ și $xyz-9xy-8xz-7yz+72x+63y+56z-504=(x-x_0)(y-y_0)(z-z_0)$, calculați produsul $4x_0y_0z_0$.

Subiectul 2

Fie $E(x,\ y,\ z,\ n)=\dfrac{x^n}{y+z}+\dfrac{y^n}{x+z}+\dfrac{z^n}{x+y}$, unde $x,\ y,\ z$ sunt numere întregi și $(x+y)(x+z)(y+z)\neq 0$.
Demonstrați că, pentru orice număr natural n, și orice numere întregi $x,\ y,\ z$, dacă $E(x,\ y,\ z,\ n)\in\mathbb{Z}$, atunci și $E(x,\ y,\ z,\ n+1)\in\mathbb{Z}$.

Subiectul 3

Fie $ABCD$ un pătrat cu latura de lungime egală cu a *cm*. O dreaptă dusă prin punctul C intersectează semidreptele $(AB,\ (AD$ în punctele E respectiv F astfel încât $AE=(a+x)\ cm$ şi $AF=(a+y)\ cm$. Construim paralelipipedul dreptunghic $AEGFMNPQ$ cu muchia AM de lungime egală cu $(a+x+y)cm$.
a) Să se arate că: $x+y\geq 2a$.
b) Dacă notăm cu $A_p,\ V_p$ aria totală respectiv volumul paralelipipedului, să se arate că:
$i) A_p\geq 32a^2;\ ii) V_p\geq 12a^3$.

Subiectul 4

În cubul $ABCDA'B'C'D'$ se notează cu P proiecţia punctului C' pe diagonala $A'C$.
Demonstraţi că dreptele AP şi $D'P$ sunt perpendiculare.

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Str. General Berthelot, nr. 28-30
sector 1, 010168, București
Tel: +40 (21) 405 62 00
+40 (21) 405 63 00
www.edu.ro

Str. Ecaterina Teodoroiu, nr. 8B, Slatina, 230015, jud. Olt
E/mail ISJ: secretariat@isjolt.ot.edu.ro
Tel: +40 (249) 41 09 27
Fax: +40 (249) 41 28 01
www.isjolt.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
26 FEBRUARIE 2017
Clasa a IX-a

Problema 1. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, arătaţi că:

$$\frac{a}{bc(b+c)}+\frac{b}{ca(c+a)}+\frac{c}{ab(a+b)}\geq\frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Problema 2. Pentru fiecare număr natural n se consideră mulţimea $A_n=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;\frac{[x]}{\{x\}}=n\right\}$.

a) Determinaţi A_3.

b) Arătaţi că A_n este infinită dacă şi numai dacă $n=0$.

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater convex, cu $\{O\}=AC\cap BD$, şi punctele $M\in(AD)$, $N\in(BC)$ astfel încât $\frac{MA}{MD}=\frac{NC}{NB}$.

a) Arătaţi că dacă $O\in MN$, atunci $AD\parallel BC$ ($ABCD$ este trapez sau paralelogram).

b) Arătaţi că dacă O este mijlocul segmentului $[MN]$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Problema 4. Determinaţi termenul general al şirului de numere naturale nenule $(a_n)_{n\geq1}$, ştiind că a_1 este impar şi că are loc relaţia $\frac{a_n^2}{2n+a_n}-\frac{n}{a_n}=\frac{a_{n+1}-4}{3}$, pentru orice număr natural $n\geq1$.

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Str. General Berthelot, nr. 28-30
sector 1, 010168, București
Tel: +40 (21) 405 62 00
+40 (21) 405 63 00
www.edu.ro

Str. Ecaterina Teodoroiu, nr. 8B, Slatina, 230015, jud. Olt
E/mail ISJ: secretariat@isjolt.ot.edu.ro
Tel: +40 (249) 41 09 27
Fax: +40 (249) 41 28 01
www.isjolt.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
26 FEBRUARIE 2017
Clasa a X-a

Problema 1. Rezolvaţi în mulțimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}-\sqrt[7]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=6\cdot\sqrt[12]{x\sqrt{x}}$.

Problema 2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\to\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\ f(z)=\dfrac{az-b}{z}$, unde $a,b\in\mathbb{R}^*$.

a) Arătaţi că funcţia f este bijectivă.

b) Fie z_1, z_2, z_3 sunt trei numere complexe nereale de module egale. Arătaţi că z_1, z_2, z_3 sunt afixele unui triunghi echilateral dacă şi numai dacă $f(z_1)$, $f(z_2)$, $f(z_3)$ sunt afixele unui triunghi echilateral.

Problema 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$5^{\frac{3x-1}{x^2+3}}\cdot 3^{\frac{1}{x+1}}\cdot 4^{x-1}=\frac{1}{15}\cdot 2^{-\frac{x^3+2}{x+1}}.$$

Problema 4. Demonstraţi că pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ are loc inegalitatea:

$$(\sin x)^{\sin^2 x}\cdot(\cos x)^{\cos^2 x}\cdot(\sin x+\cos x)\geq 1.$$

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Str. General Berthelot, nr. 28-30
sector 1, 010168, București
Tel: +40 (21) 405 62 00
+40 (21) 405 63 00
www.edu.ro

Str. Ecaterina Teodoroiu, nr. 8B, Slatina, 230015, jud. Olt
E/mail ISJ: secretariat@isjolt.ot.edu.ro
Tel: +40 (249) 41 09 27
Fax: +40 (249) 41 28 01
www.isjolt.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
26 FEBRUARIE 2017
Clasa a XI-a

Problema 1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3B = I_3 - B$. Arătaţi că $AB = BA$.

Problema 2. a) Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ şi $x \in \mathbb{C}$. Demonstraţi relaţia
$\det(A + xB) = \det A + \left(\mathrm{Tr}A \cdot \mathrm{Tr}B - \mathrm{Tr}(AB)\right) \cdot x + (\det B) \cdot x^2$, unde $\mathrm{Tr}(M)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A.

b) Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $A^2 = O_2$. Arătaţi că pentru orice matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ au loc inegalităţile: $\det(AB - BA) \leq 0 \leq \det(AB + BA)$.

Problema 3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent de numere reale pozitive. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + a_k}$.

Problema 4. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 > 1$ şi $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}$, $n \geq 1$.

Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$.

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
26 FEBRUARIE 2017
Clasa a XII-a

Problema 1. Fie mulţimea $G=\left\{ (u,v)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C} \mid u\neq 0 \right\}$ şi funcţia $\varphi:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*$ o funcţie cu proprietatea că legea de compoziţie $\circ$ definită pe G prin $(a,b)\circ(c,d)=\left(ac,bc+d\varphi(a)\right)$ este asociativă.

a) Arătaţi că $(G,\circ)$ este grup.

b) Determinaţi funcţia φ pentru care G este grup abelian.

Problema 2. Fie $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ şi $\mathbb{Z}_n$ inelul claselor de resturi modulo n.

a) Să se arate că dacă există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n=4k+1$, atunci $\hat{1}+\hat{2}+...+\widehat{n-1}=\hat{0}$.

b) Să se demonstreze că orice element nenul din $\mathbb{Z}_n$ este fie inversabil, fie divizor al lui zero.

c) Să se determine numărul divizorilor lui zero din inelul $\mathbb{Z}_{90}$.

Problema 3. Calculaţi integrala $I=\int_{-1}^{1}\frac{\arccos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$.

Problema 4. **a)** Fie $f:[1,\infty)\to(0,\infty)$ o funcţie descrescătoare. Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n=f(1)+f(2)+...+f(n)-\int_1^n f(x)\,dx$, $n\geq 1$, este convergent.

b) Se consideră şirul $(b_n)_{n\geq 1}$, cu $b_n=\frac{1}{1+\sqrt{1}}+\frac{1}{2+\sqrt{2}}+...+\frac{1}{n+\sqrt{n}}$, $n\geq 1$.

Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(b_n-\sqrt{n}\right)$.

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.